

CORRECTION DU DS n°1 du 01/10/2018

Exercice d'enseignement obligatoire :

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 4[\cup] 4 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2x - 8}$. On appelle C_f sa courbe représentative.

1. Pour calculer la limite de f en $+\infty$, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2x - 8} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x \left(2 - \frac{8}{x}\right)} = \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{8}{x}\right)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{8}{x}\right) = 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par produit on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x - 4) = 4^2 - 2 \times 4 - 4 = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 8) = 0$.

Pour déterminer les limites de f en 2 (à gauche et à droite), il faut connaître le signe de $2x - 8$ sur R .

$2x - 8$ est négatif sur $] -\infty ; 4[$ et positif sur $] 4 ; +\infty [$, donc $\lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - 8 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 8 = 0^+$

Ainsi par quotient en faisant attention aux signes, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$.

3. La droite d'équation $x=4$ est donc une asymptote verticale de la courbe représentative de la fonction f .

4. f est une fonction dérivable sur $] -\infty ; 4[\cup] 4 ; +\infty [$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-8) - (x^2-2x-4) \times 2}{(2x-8)^2} = \frac{4x^2 - 16x - 4x + 16 - 2x^2 + 4x + 8}{(2x-8)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 24}{(2x-8)^2} = \frac{x^2 - 8x + 12}{2(x-4)^2}$$

On étudie le signe de f' .

Pour tout $x \in] -\infty ; 4[\cup] 4 ; +\infty [$, $2(x-4)^2 > 0$

Pour $x^2 - 8x + 12$, on peut utiliser le discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 12 = 16$ donc il y a deux racines à calculer, on trouve 2 et 6. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	4	6	$+\infty$
$2(x-4)^2$	+		+		+
$x^2 - 8x + 12$	+		-		+
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	5

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2 - 4}{2 \times 2 - 8} = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ et } f(6) = \frac{6^2 - 2 \times 6 - 4}{2 \times 6 - 8} = \frac{20}{4} = 5$$

5. On appelle Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

- a) Pour tout réel $x \neq 4$, on a :

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2x - 8} - \frac{x(x-4) + (2x-8)}{2x-8} = \frac{x^2 - 2x - 4 - x^2 + 4x - 2x + 8}{2x-8} = \frac{4}{2x-8} = \frac{2}{x-4}$$

- b)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	-		+
$\frac{2}{x-4}$	-		+

Sur $] -\infty ; 4[$, $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ est négatif donc la courbe représentative de f est en-dessous de la droite Δ .

Sur $] 4 ; +\infty [$, $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ est positif donc la courbe représentative de f est au-dessus de la droite Δ .

- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-4} = 0$. Cela signifie que la courbe représentative de f se rapproche de la droite Δ en $+\infty$.